Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA d'Al-Hoceima.
A. BOUJRAF

Filières : AP2
Matière : Analyse numérique
Année Universitaire : 19/20.

Feuille de TD $n°2$

Exercice 1. On note $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)dt$ et $\mathcal{I}_Q(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(t_i)$.

1. On choisit $\omega_i = \int_a^b L_i(t)dt$, avec L_i est le i-ème polynôme de Lagrange associé aux points $t_0, t_1, \ldots, t_n$.
   Montrer que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_Q(p)$, $\forall p \in \mathbb{P}_n$.
2. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_Q(p)$, $\forall p \in \mathbb{P}_n$, montrer que $\omega_i = \int_a^b L_i(t)dt$.
3. Si on note $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ la base canonique de $\mathbb{P}_n$, montrer que

$$\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_Q(p), \;\; \forall p \in \mathbb{P}_n \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{I}(p_i) = \mathcal{I}_Q(p_i), \;\; i = 0, 1, \ldots, n.$$

Exercice 2. Soit $0 < \alpha \leq 1$ un nombre réel donné, soit $t_1 = -\alpha$, $t_2 = 0$ et $t_3 = \alpha$ et soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, trois nombres réels. Nous considérons la formule de quadrature définie par

$$\mathcal{I}_Q(g) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j g(t_j),$$

où g est une fonction continue sur $[-1, 1]$.

1. Trouver ω_1, ω_2, et ω_3 en function de α de sorte que $\mathcal{I}_Q$ soit exacte sur les polynômes de degré 2.
2. Montrer qu'avec de tels poids, $\mathcal{I}_Q$ est exacte sur les polynômes de degré 3.
3. Existe-t-il α tel que la formule $\mathcal{I}_Q$ soit exacte sur les polynômes de degré 5 ? Si oui, caculer ce α.

Exercice 3. On souhaite obtenir une approximation de $\ln(2)$ à l'aide de la formule suivante

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}.$$

1. a. Ecrire l'approximation obtenue par la formule de trapèze simple.
   b. Pourquoi la valeur numérique obtenue à la question précédente est-elle supérieure à $\ln(2)$?
   c. Comparer le résultat obtenu à la première question avec celui obtenu par la formule de simpson.
2. Montrer que la méthode de trapèze composée conduit à une approximation :

$$\ln 2 \simeq \mathcal{A}(n) = \frac{\alpha}{n} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \frac{\beta}{n+k},$$

   où α et β sont deux constantes à déterminées.

3. Montrer que l'erreur associée à la formule de trapèze composite est donnée par

$$\left|\int_1^2 f(t)dt - \mathcal{A}(n)\right| \leq \frac{M}{12n^2} \quad \text{avec } M = \max_{x\in[1,2]} |f^{(2)}(x)|.$$

4. Quelle valeur de n faudrait-il choisir pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ avec 5 décimales précises ?.

Exercice 4. On considère la formule de quadrature sur l'intervalle $[-1,1]$ suivante

$$\mathcal{I}_Q(f) = a_0 f(x_0) + a_0 f(-x_0) + a_1 f(1) + a_1 f(-1).$$

1. Déterminer a_0, a_1 et x_0 pour que la formule soit exacte sur les polynômes de degré 5.
2. Appliquer ce résultat à la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Quelle approximation de π obtient-on ?

Exercice 5. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1([-1,1])$ et p le polynôme d'interpolation d'Hermite de f vérifiant :

$$p(-1) = f(-1),\ \ p'(-1) = f'(-1),\ \ p(1) = f(1) \text{ et } p'(1) = f'(1).$$

1. Écrire le polynôme p.
2. En déduire la formule de quadrature des trapèzes-Hermite suivante :

$$\int_{-1}^1 f(t)dt \simeq f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}\Big(f'(-1) - f'(1)\Big).$$

3. Connaissant la formule sur $[-1,1]$, en déduire la formule de quadrature des trapèzes-Hermite sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 6. Soient les formules de quadrature

$$\int_0^1 f(t)dt \simeq a_1 f(0) + a_2 f(1) + b_1 f'(0) + b_2 f'(1), \tag{1}$$

$$\int_a^b f(t)dt \simeq \alpha\,[f(a) + f(b)] + \beta\,[f'(a) - f'(b)]\,. \tag{2}$$

1. Déterminer les coefficients a_1, a_2, b_1 et b_2 pour que la formule de quadrature (1) soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible. Quelle est alors son degré de précision ?
2. Par un changement de variable, écrire (1) pour un intervalle $[a,b]$ quelconque.
3. Sachant que la formule (1) a été obtenue en intégrant sur $[0,1]$ la relation :

$$f(t) = p(t) + \frac{f^{(4)}(\alpha_t)}{24} t^2 (t-1)^2,$$

où $\alpha_t \in]0,1[$, donner alors l'expression de l'erreur dans la formule (1).

4. Retrouver le résultat de la question 2 en déterminant les coefficients α et β pour que la formule de quadrature (2) soit exacte pour les polynômes de degré le plus élevé possible.
5. En déduire la formule composite associée à (2).

Solution 1. $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(t)dt$ et $\mathcal{I}_Q(f) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(t_i)$.

1. Soit $p \in \mathbb{P}_n$, on a $p(t) = \sum_{i=0}^n p(t_i)L_i(t)$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(p) = \int_a^b p(t)dt &= \sum_{i=0}^n p(t_i) \int_a^b L_i(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^n \omega_i p(t_i) = \mathcal{I}_Q(p).\end{aligned}$$

2. $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_Q(p)$, $\forall p \in \mathbb{P}_n \Rightarrow \mathcal{I}(L_j) = \mathcal{I}_Q(L_j), \ \ \forall j = 0, 1, \ldots, n$.
   Or, $\mathcal{I}(L_j) = \int_a^b L_j(t)dt$ et $\mathcal{I}_Q(L_j) = \sum_{i=0}^n \omega_i L_j(t_i) = \omega_j$,
   d'où le résultat.
3. $\mathcal{I}(p) = \mathcal{I}_Q(p), \ \ \forall p \in \mathbb{P}_n \Rightarrow \mathcal{I}(p_i) = \mathcal{I}_Q(p_i), \ \ i = 0, 1, \ldots, n$.
   Réciproquement, on suppose que $\mathcal{I}(p_i) = \mathcal{I}_Q(p_i), \ \ i = 0, 1, \ldots, n$.
   Soit $p \in \mathbb{P}_n$ alors $p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i p_i(t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(p) = \int_a^b p(t)dt &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_a^b p_i(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathcal{I}(p_i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathcal{I}_Q(p_i) \\ &= \mathcal{I}_Q(\sum_{i=0}^n \alpha_i p_i) = \mathcal{I}_Q(p).\end{aligned}$$

Solution 2.

1. D'après l'exercice 1, $\mathcal{I}_Q$ est exacte sur $\mathbb{P}_2$ ssi $\omega_j = \int_{-1}^1 L_j(t)dt$, $j = 1, 2, 3$.
   On a

$$\begin{aligned}L_1(t) &= \frac{t(t-\alpha)}{-\alpha(-\alpha-\alpha)} = \frac{t(t-\alpha)}{2\alpha^2}, \\ L_2(t) &= \frac{(t+\alpha)(t-\alpha)}{\alpha(0-\alpha)} = -\frac{(t+\alpha)(t-\alpha)}{\alpha^2}, \\ L_3(t) &= \frac{(t+\alpha)t}{(\alpha+\alpha)\alpha} = \frac{t(t+\alpha)}{2\alpha^2}.\end{aligned}$$

   D'où

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \int_{-1}^1 L_1(t)dt = \frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{t^3}{3} - \alpha\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3\alpha^2}, \\ \omega_2 &= \int_{-1}^1 L_2(t)dt = -\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{t^3}{3} - \alpha^2 t\right]_{-1}^1 = \frac{-2}{3\alpha^2} + 2.\end{aligned}$$

   Pour raison de symétrie $\omega_3 = \omega_1$.
2. On a

$$\mathcal{I}_Q(p_3) = \omega_1(-\alpha)^3 + \omega_1 0 + \omega_3\alpha^3 = 0 = \int_{-1}^1 p_3(t)dt.$$

   D'où l'exactitude sur $\mathbb{P}_3$.

3. La formule $\mathcal{I}_Q(\cdot)$ est exacte sur $\mathbb{P}_4$ ssi $\mathcal{I}_Q(p_4) = \int_{-1}^{1} p_4(t)dt$, c-à-d
$$\omega_1(-\alpha)^4 + \omega_1 0 + \omega_3\alpha^4 = \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$
Finalement, on vérifie facilement que :
$$\mathcal{I}_Q(p_5) = \int_{-1}^{1} p_5(t)dt = 0.$$
D'où l'exactitude sur $\mathbb{P}_5$.

<u>**Solution 3.**</u> On pose $f(t) = \frac{1}{t}$, $a = 1$ et $b = 2$, on a
$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t} = \int_a^b f(t)dt.$$

1. a. Avec la formule de trapèze simple, on a
$$\int_1^2 \frac{dt}{t} \simeq \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} = 0.75.$$
Soit une erreur de 0.0569.
   b. La valeur numérique obtenue à la question précédente est supérieure à $\ln(2)$, car la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est convexe. On peut se convaincre à l'aide d'un dessin que le trapèze est au-dessus de la courbe $y = f(x)$. D'où, l'aire du trapèze sera supérieure à l'aire de la courbe.
   c. Avec la formule de simpson, on a
$$\int_1^2 \frac{dt}{t} \simeq \frac{(b-a)}{2}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) = \frac{25}{36} = 0.6944.$$
Soit une erreur de 0.0013.
D'où, la formule de simpson est plus précise que celle du trpèze.
2. Soit $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, la méthode de trapèze composée est :
$$\begin{aligned}
\ln 2 \simeq \mathcal{A}(n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)}{2}\left(f(x_k) + f(x_{k+1})\right) \\
&= \frac{f(1) + f(2)}{2n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\
&= \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4}, \ \ \beta = 1.
\end{aligned}$$
3. L'erreur associée à la formule de trapèze composite est donnée par
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt - \mathcal{A}(n)\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f^{(2)}(\xi_t^k)}{2!}(t - x_k)(t - x_{k+1})dt\right| \\
&\leq \frac{M}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{6} \\
&\leq \frac{M}{12n^2} \quad \text{avec } M = \max_{x\in[1,2]} |f^{(2)}(x)|
\end{aligned}$$

4. Pour que l'approximation $\ln(2)$ soit en 10^{-5}, il suffit que
$$\frac{M}{12n^2} \leq 10^{-5}.$$
On a
$$f^{(2)}(x) = \frac{2}{x^3} \text{ avec } 1 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad M \leq 2.$$
D'où $\frac{1}{6n^2} \leq 10^{-5} \Rightarrow n \geq 130$.

Solution 4.

$$\mathcal{I}_Q(f) = a_0 f(x_0) + a_0 f(-x_0) + a_1 f(1) + a_1 f(-1).$$

1. Cette formule est exacte sur $\mathbb{P}_5$, cela est équivalent à :

$$\begin{cases} a_0 + a_0 + a_1 + a_1 = 2, \\ a_0x_0 - a_0x_0 + a_1 - a_1 = 0, \\ a_0x_0^2 + a_0x_0^2 + a_1 + a_1 = \frac{2}{3}, \\ a_0x_0^3 - a_0x_0^3 + a_1 - a_1 = 0, \\ a_0x_0^4 + a_0x_0^4 + a_1 + a_1 = \frac{2}{5}, \\ a_0x_0^5 - a_0x_0^5 + a_1 - a_1 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 = 1, \\ a_0x_0^2 + a_1 = \frac{1}{3}, \\ a_0x_0^4 + a_1 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 - a_0, \\ a_0 - a_0x_0^2 = \frac{2}{3}, \\ a_0 - a_0x_0^4 = \frac{4}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 - a_0, \\ a_0(1 - x_0^2) = \frac{2}{3}, \\ 1 + x_0^2 = \frac{6}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = \frac{5}{6}, \\ a_1 = \frac{1}{6}, \\ x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

2. Si on applique cette formule à la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on obtient
$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \simeq \frac{1}{6}\left(f(-1) + 5f(-\frac{1}{\sqrt{5}}) + 5f(\frac{1}{\sqrt{5}}) + f(1)\right) = \frac{14}{9}.$$
D'où
$$\pi \simeq \frac{28}{9} = 3.1111.$$

Solution 5.

1. Le polynôme interpolation d'Hermite p s'écrit comme suit :
$$p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3,$$
tel que
$$\begin{cases} p(-1) = f(-1), \\ p(1) = f(1), \\ p'(-1) = f'(-1), \\ p'(1) = f'(1). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma - \delta = f(-1), \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = f(1), \\ \beta - 2\gamma + 3\delta = f'(-1), \\ \beta + 2\gamma + 3\delta = f'(1). \end{cases}$$
On obtient,
$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{4}\left[2f(-1) + 2f(1) + f'(-1) - f'(1)\right], \\ \beta = \frac{1}{4}\left[-3f(-1) + 3f(1) - f'(-1) - f'(1)\right], \\ \gamma = \frac{1}{4}\left[-f'(-1) + f'(1)\right], \\ \delta = \frac{1}{4}\left[f(-1) - f(1) + f'(-1) + f'(1)\right]. \end{cases}$$

2. En intégrant le polynôme ainsi trouvé on en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \int_{-1}^{1} p(x)dx &= \left[\alpha x + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{\gamma}{3}x^3 + \frac{\delta}{4}x^4\right]_{-1}^{1} \\
&= 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma \\
&= \frac{1}{2}\left[2f(-1) + 2f(1) + f'(-1) - f'(1)\right] + \frac{1}{6}\left[-f'(-1) + f'(1)\right] \\
&= f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}\Big(f'(-1) - f'(1)\Big).
\end{aligned}$$

Remarque 1. *la formule est au moins exacte de degré* 3 *par construction. Elle n'est pas exacte de degré supérieure à* 3 *car pour* $f(x) = x^4$*, on a*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{6}{15}$$

et

$$f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}\Big(f'(-1) - f'(1)\Big) = 1 + 1 + \frac{1}{3}\Big(4 + 4\Big) = \frac{70}{15}.$$

3. Connaissant la formule sur $[-1, 1]$, on en déduit la formule sur un intervalle $[a, b]$ quelconque par le changement de variable $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}$ qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} f(y)dy &= \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)dx \\
&= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b) + \frac{b-a}{6}\Big(f'(a) - f'(b)\Big)\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big) + \frac{(b-a)^2}{12}\Big(f'(a) - f'(b)\Big).
\end{aligned}$$

Solution 6. On pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_Q(f) &= a_1 f(0) + a_2 f(1) + b_1 f'(0) + b_2 f'(1), \\
\mathcal{J}_Q(f) &= \alpha\left[f(a) + f(b)\right] + \beta\left[f'(a) - f'(b)\right].
\end{aligned}$$

1. $\mathcal{I}_Q$ est exacte sur $\mathbb{P}_3$ ssi $\mathcal{I}_Q(p_i) = \int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 0, 1, 2, 3$, c-à-d

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + b_1 + b_2 = \frac{1}{2}, \\ a_2 + 2b_2 = \frac{1}{3}, \\ a_2 + 3b_2 = \frac{1}{4}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1, \\ a_2 + b_1 + b_2 = \frac{1}{2}, \\ a_2 + 2b_2 = \frac{1}{3}, \\ b_2 = -\frac{1}{12}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2}, \\ a_2 = \frac{1}{2}, \\ b_1 = \frac{1}{12}, \\ b_2 = -\frac{1}{12}. \end{array}\right.$$

D'où

$$\mathcal{I}_Q(f) = \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] + \frac{1}{12}\left[f'(0) - f'(1)\right].$$

La formule $\mathcal{I}_Q$ est exacte sur $\mathbb{P}_4$ ssi $\mathcal{I}_Q(p_4) = \int_0^1 p_4(x)dx$. Or,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_Q(f) &= \frac{1}{2}\left[0 + 1\right] + \frac{1}{12}\left[0 - 4\right] \\
&= \frac{1}{6} \neq \int_0^1 p_4(x)dx = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

Alors, le degré de précision de $\mathcal{I}_Q$ est 3.

2. On pose $x = a + (b-a)t$, $t \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt \\
&= (b-a)\int_0^1 g(t)dt, \quad \text{avec } g(t) = f(a+(b-a)t). \\
&\simeq (b-a)\left\{\frac{1}{2}\left[g(0)+g(1)\right] + \frac{1}{12}\left[g'(0)-g'(1)\right]\right\}, \\
&= \frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right].
\end{aligned}$$

3. On a

$$f(t) = p(t) + \frac{f^{(4)}(\alpha_t)}{24}t^2(t-1)^2, \quad \alpha_t \in]0,1[.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 p(t)dt &= \int_0^1 \frac{f^{(4)}(\alpha_t)}{24}\underbrace{t^2(t-1)^2}_{\geq 0}dt \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_0^1 t^2(t-1)^2dt, \quad \xi \in]0,1[\quad \text{(1ère formule de la moyenne)} \\
&= \frac{1}{720}f^{(4)}(\xi).
\end{aligned}$$

4. La formule $\mathcal{J}_Q$ est exacte sur $\mathbb{P}_1$ ssi

$$\begin{cases} \mathcal{J}_Q(p_0) = \int_a^b p_0(x)dx = b-a, \\ \mathcal{J}_Q(p_1) = \int_a^b p_1(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{b-a}{2}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Cette formule est exacte sur $\mathbb{P}_2$ ssi $\mathcal{J}_Q(p_2) = \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b^3-a^3}{3}$, c-à-d

$$\begin{aligned}
&\alpha\left[a^2+b^2\right] + \beta\left[2a-2b\right] = \frac{b^3-a^3}{3} \quad \Leftrightarrow \\
&\frac{b-a}{2}\left[a^2+b^2\right] + 2\beta\left[a-b\right] = \frac{b^3-a^3}{3} \quad \Leftrightarrow \\
&\beta = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Finalement, on vérifie facilement que :

$$\mathcal{J}_Q(p_3) = \int_a^b p_3(x)dx \ \text{ et que } \ \mathcal{J}_Q(p_4) \neq \int_a^b p_4(x)dx.$$

D'où l'exactitude sur $\mathbb{P}_3$.

5. D'après la question précédente,

$$\mathcal{J}_Q(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a)-f'(b)\right].$$

Soit $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$ et $h = \frac{b-a}{n}$. On a

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\
&\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left[f(x_i) + f(x_{i+1}) \right] + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{12} \left[f'(x_i) - f'(x_{i+1}) \right] \right\} \\
&= \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) + f(x_{i+1}) \right] + \frac{h^2}{12} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f'(x_i) - f'(x_{i+1}) \right] \\
&= \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) \right] + \frac{h^2}{12} \left[f'(a) - f'(b) \right] + h \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).
\end{aligned}$$